



INTERCAMBIO

Comprensión de los tipos de triángulos apoyados en el uso del mecano

Melania Bernabeu Martínez, Mar Moreno Moreno

Universidad de Alicante

Licencia para UNIVERSIDAD DE ALICANTE



Se describe una sesión de enseñanza con estudiantes de educación primaria sobre los tipos de triángulos según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno), empleando el mecano como material manipulativo. Las tareas propuestas tienen como objetivo ampliar la imagen del concepto de triángulo e interiorizar las definiciones de los tipos de triángulos según sus lados.

PALABRAS CLAVE

- GEOMETRÍA
- TRIÁNGULOS
- MECANO
- IMAGEN DEL CONCEPTO
- MATERIAL MANIPULATIVO





La comprensión de los conceptos geométricos es un proceso que se va adquiriendo de manera gradual. Para describir este proceso, Tall y Vinner (1981) desarrollaron las ideas de *imagen del concepto* y *definición del concepto*. La *imagen del concepto* –imágenes mentales, propiedades y procesos asociados (Tall y Vinner, 1981, pp. 152)– se genera a través de las experiencias que el estudiante tiene, a lo largo de los años, y se va desarrollando para construir la *definición del concepto* –descripción discursiva para especificar el concepto (Tall y Vinner, 1981, pp. 152)–, aceptada por la comunidad matemática. A menudo, la imagen del concepto solo incluye ejemplos prototípicos de figuras geométricas que dificultan la identificación de los atributos de la definición del concepto.

Entendemos por *figura prototípica* aquella que se emplea como ejemplo para abordar un concepto geométrico; por ejemplo, el cuadrado y el rectángulo en una determinada posición y tamaño

como ejemplos de cuadriláteros. Además, cuando a los estudiantes se les proporciona la definición de un concepto o cuando se ejemplifica este en un recurso educativo (libros de texto, diccionarios, páginas web, etc.), habitualmente se usan figuras prototípicas. Por ello, el estudiante tiende a asociar la definición del concepto con su imagen prototípica, con la que está familiarizado.

En relación con el concepto de triángulo, se consideran ejemplos prototípicos el triángulo equilátero y, a veces, el isósceles, con la base de la figura paralela al borde de la hoja (imagen 1). Este tipo de triángulos presentan atributos relevantes para la definición del concepto (polígono de tres lados) e irrelevantes, como la posición de la base del triángulo paralela al borde de la hoja, tamaño y color, los cuales dificultan la definición (Hershkowitz y Vinner, 1983). De esta manera, los estudiantes tienen dificultades en aceptar un triángulo escaleno en posición prototípica o un equilátero en posición

A los estudiantes les cuesta aceptar un triángulo escaleno en posición prototípica como ejemplo de triángulo

no-prototípica como ejemplos de triángulo, pues no son ejemplos prototípicos (imagen 1).

Asimismo, las figuras geométricas se representan en dos tipos de registros semióticos: registro discursivo y no-discursivo. Los *registros discursivos* se refieren a la comunicación verbal, tanto oral como escrita.

Un ejemplo de este registro son las definiciones de los conceptos geométricos, las palabras que designan al concepto o a sus atributos, etc. Por otro lado, los *registros no-discursivos* se refieren a las representaciones realizadas a mano alzada y a las construcciones de figuras geométricas con regla y compás (Duval, 2017).

La identificación de los atributos puede realizarse desde diversos registros semióticos; por ejemplo, desde una expresión escrita u oral (registros discursivos del cuadro 1), o desde un dibujo o una representación realizada con materiales



Imagen 1. Ejemplos de triángulos prototípicos y no-prototípicos

como el mecano (primera construcción del cuadro 1 del registro no-discursivo) o el geoplano (segunda construcción del cuadro 1 del registro no-discursivo), entre otros.

La comprensión de un concepto geométrico se evidencia cuando un estudiante es capaz de cambiar de registro semiótico (*conversión*), manteniendo los atributos que denota el concepto geométrico de referencia (Duval, 2017). Por ejemplo, cuando el estudiante construye un tipo de polígono a partir de su definición, cambiando del registro discursivo al no-discursivo (cuadro 2).

Las figuras geométricas se representan en dos tipos de registros semióticos: discursivo y no-discursivo

SECUENCIA DIDÁCTICA

Se presenta una secuencia de tareas dirigida a estudiantes de 9 años. Los objetivos son ampliar la imagen del concepto de triángulo y desarrollar la habilidad de analizar los triángulos según sus lados para determinar los atributos relevantes que los caracterizan.

Los participantes de esta experiencia fueron 29 estudiantes de tercero de primaria de una escuela pública de España. Estas tareas fueron implementadas en una sesión de 50 minutos de duración. Se presentó a los estudiantes los tipos de triángulos según sus lados a partir de definiciones inclusivas:

- *Triángulo equilátero*, triángulo isósceles con tres lados iguales.
- *Triángulo isósceles*, triángulo con dos lados iguales.
- *Triángulo escaleno*, triángulo con lados diferentes.

En esta sesión, el mecano fue empleado como material manipulativo para formar figuras geométricas. Este material consta de unas varillas de colores de distintas longitudes agujereadas que se unen mediante encuadernadores o sujetadores de papel y permiten el movimiento de estas (imagen 2).

Registro discursivo	Registro no discursivo
<p>Triángulo: polígono de tres lados</p> <p>Es un triángulo</p>	

Cuadro 1. Ejemplos de registros semióticos del triángulo

Registro discursivo	Registro no discursivo
<p>Construye con el mecano un polígono de tres lados</p>	

Cuadro 2. Ejemplo de cambio de registro

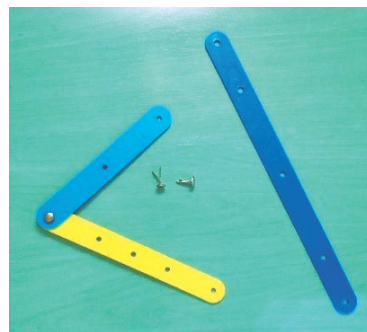


Imagen 2. Varillas de mecano y encuadernadores



CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE TRIÁNGULO

Primer paso: eliminar concepciones erróneas vinculadas a la posición de las figuras

Inicialmente, proporcionamos las definiciones de los tres tipos de triángulos según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno), mostrando imágenes que ejemplificarán los atributos que caracterizan las definiciones dadas. A continuación, construimos diferentes tipos de triángulos usando varillas de diferente longitud para mostrar a los estudiantes cómo se empleaba el material (imagen 3).

El mecano permite mostrar los diferentes tipos de triángulos en diversas posiciones, lo que ayuda a que los estudiantes amplíen la imagen del concepto de triángulo construido a partir de figuras prototípicas. De esta manera, los estudiantes tienen la posibilidad de visualizar los tres tipos de triángulos a partir de una variedad de ejemplos en diferentes posiciones. Al inicio de la sesión, se mostró secuencialmente cada uno de los triángulos (equilátero, isósceles y escaleno) en posiciones prototípicas para que los estudiantes los identificaran. Los estudiantes reconocieron con facilidad cada uno de los tipos de triángulos. A

continuación, se presentaron los mismos triángulos en posiciones no-prototípicas, lo cual generó dificultades en su reconocimiento. Para superar estas dificultades, se inició una fase de manipulación con los triángulos contruïdos, guiada por preguntas relacionadas con los atributos relevantes asociados a cada tipo de triángulo. Tras esta fase, los estudiantes

fueron capaces de reconocer que la posición no era un atributo relevante que determinara el tipo de triángulo.



MAESTRA: Entonces, si yo ahora coloco el triángulo así, ¿qué es? (*girando el triángulo isósceles a una posición no-prototípica*) (imagen 4).



Imagen 3. Triángulos equilátero, isósceles y escaleno contruïdos con el mecano



Imagen 4. Momento de discusión sobre el reconocimiento de un triángulo isósceles

ESTUDIANTE 3: Es isósceles.

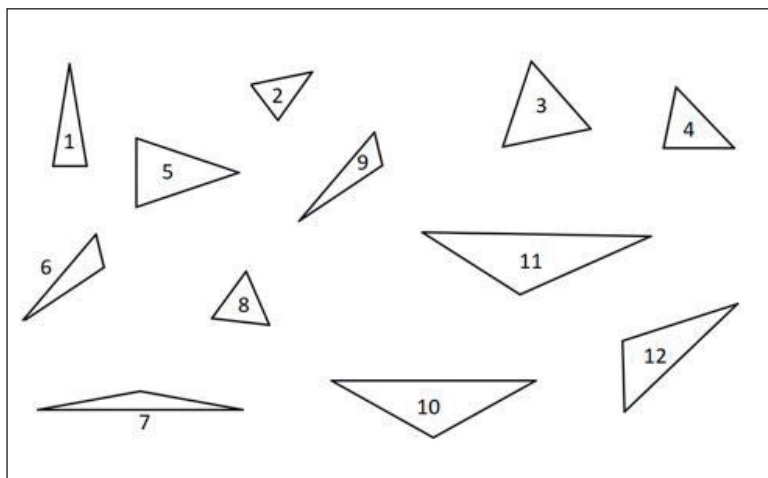
MAESTRA: ¿Seguro? Yo no estoy acostumbrada a ver este tipo de triángulos.

ESTUDIANTE 4: Ya, pero da igual, tiene dos lados iguales.

MAESTRA: Entonces, ¿qué pasa cuando lo giro? ¿Se convierte en otro triángulo?

ESTUDIANTE 5: Nada, da igual cómo pongas el triángulo, va a seguir siendo isósceles.

ESTUDIANTE 6: Un triángulo isósceles, aunque lo pongas al revés, sigue siendo isósceles.



Cuadro 3. Tarea sobre construcción de triángulos a partir de triángulos dibujados

Segundo paso: analizar para construir

Identificar las partes de un triángulo conlleva examinarlo detalladamente. Para favorecer la habilidad de analizar los tipos de triángulos según sus lados, realizamos una tarea en grupo que consistió en identificar los tipos de triángulos dibujados en una hoja, determinando la longitud de sus lados y construyéndolos con el mecano para apoyar sus razonamientos (cuadro 3).

Para determinar si los triángulos eran equiláteros, isósceles o escalenos, los estudiantes debían identificar cómo eran sus lados. El alumnado disponía de una regla para comprobar la igualdad o desigualdad de los lados de los triángulos en aquellos casos

menos evidentes. Para ello, comparaban la longitud de sus lados y determinaban el tipo de triángulo que era:



MAESTRA: En el triángulo 2, un lado mide 2 centímetros y el otro mide 2 (centímetros) también, ¿qué tipo de triángulo puede ser?

ESTUDIANTE 2: Isósceles o equilátero.

MAESTRA: El tercero mide 1 centímetro y medio.

ESTUDIANTE 2: Entonces es un isósceles.

Asimismo, construían cada uno de los triángulos de la hoja con el mecano para apoyar sus razonamientos. La maestra mostraba al resto del grupo algunos de estos triángulos y pedía que identificaran y justificaran el tipo de trián-

gulo que era, y que comprobaran su respuesta midiendo la longitud de las varillas (lados):



MAESTRA: El lado amarillo mide 29 centímetros; el azul, 24 centímetros. ¿Qué tipo de triángulo puede ser?

ESTUDIANTES: Isósceles o escaleno, según como sea el tercero.

MAESTRA: (la estudiante mide el último lado) 22 centímetros.

ESTUDIANTES: Escaleno.

MAESTRA: ¿Por qué?

ESTUDIANTE 7: Porque sus lados son distintos.

Estas tareas favorecen la identificación del tipo de triángulo según sus lados y su construcción a partir del análisis de las características de los lados.



Tercer paso: modificar triángulos para consolidar el concepto

Para modificar una figura geométrica en otra, el estudiante debe identificar qué atributos comparten ambas figuras y en cuáles difiere la figura inicial respecto de la que se desea obtener, y realizar las modificaciones pertinentes. Por ejemplo, en el caso de los triángulos según sus lados, la maestra mostró un triángulo isósceles construido con el mecano y preguntó al grupo-clase qué se debe modificar para que sea un escaleno:



ESTUDIANTE 8: Tienes que poner una de estas (*de las dos varillas iguales*) más pequeña o más grande (imagen 5).

MAESTRA: ¿Por qué una de estas varillas?

ESTUDIANTE 8: Porque estos dos son iguales (*varillas azules*) y tenemos que cambiar uno de estos, para que no sean iguales.

La maestra continuó la tarea pidiendo otras transformaciones; por ejemplo, modificar un isósceles en equilátero, un escaleno en isósceles, un equilátero en un escaleno, etc. **Cuando un estudiante sabe modificar un triángulo en otro, manifiesta que identifica los atributos relevantes de los tipos de**

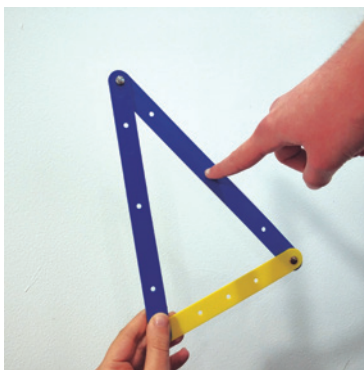


Imagen 5. Justificación de la transformación de triángulo isósceles a escaleno

triángulos según sus lados y sabe hacer uso de estos.

REFLEXIONES FINALES

Emplear material manipulativo favorece el desarrollo de la comprensión de los conceptos geométricos ya que, al disponer de múltiples ejemplos y contraejemplos de tipos particulares de triángulos, los estudiantes amplían la imagen del concepto de triángulo (Tall y Vinner, 1981) y superan concepciones erróneas; por ejemplo, la debida a la posición de estos.

Asimismo, al usar el mecano para construir triángulos, los estudiantes centran su atención en los atributos relevantes que caracterizan cada tipo de triángulo, por lo que dicho material se constituye como un modelo adecuado que favorece las transformaciones entre los

registros discursivos y no-discursivos, y la interiorización de la definición del concepto. ◀

Referencias bibliográficas

- DUVAL, R. (2017): *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Londres. Springer.
- HERSHKOWITZ, R.; VINNER, S. (1983): «The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts», en HERSHKOWITZ, R. (ed.): *Proceedings of the 7th PME International Conference*. Rehovot, Israel. Weizmann Institute of Science, pp. 223-228.
- TALL, D.; VINNER, S. (1981): «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12(2), pp. 151-169.

Direcciones de contacto

Melania Bernabeu Martínez

Mar Moreno Moreno

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

melania.bernabeu@ua.es

mmoreno@ua.es

Este artículo fue recibido en UNO:

REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en mayo de 2019 y aceptado en junio de 2019 para su publicación.